Universidade Federal Fluminense - GMA

Gabarito de VE2 - Cálculo 2B - Turma C1+C2 - Prof. Zhou Cong

Questão 1 (20 pts)**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por :

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy^2) - y^3.$$

(a) (5 pts) Calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1)$ no ponto $(1,1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(b) (8 pts) Escreva o polinômio de Taylor de grau 9 centrado no ponto $(0,0)$ da função f.

(c) (7 pts) Calcule $\dfrac{\partial^9 f}{\partial x^3 \partial y^6}(0,0)$ (dica: você pode usar o polinômio obtido no item (b)).

Solução: Como a função f é formada por composição de funções diferenciáveis, f é diferenciável. Portanto:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1) = \left\langle \nabla f(1,1), \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos(1) - 1\right).$$

Para encontrar o polinômio de Taylor de grau 9 da função f em $(0,0)$, vamos começar escrevendo o polinômio de grau 3 da função $\operatorname{sen} t$ que é:

$$p(t) = t - \frac{t^3}{3!}.$$

Fazendo a mudança de variável $t = xy^2$, obtemos o polinômio de Taylor de grau 9 da função $\operatorname{sen}(xy^2)$:

$$p(x,y) = xy^2 - \frac{x^3y^6}{3!}.$$

Portanto o polinômio de Taylor de grau 9 da função $\operatorname{sen}(xy^2) - y^3$ centrado no ponto $(0,0)$ é:

$$q(x,y) = xy^2 - y^3 - \frac{x^3y^6}{3!}.$$

Todas as derivadas parciais de ordem ≤ 9 no ponto $(0,0)$ são iguais a da $f(x,y)$. Em particular:

$$\frac{\partial^9 f}{\partial x^3 \partial y^6}(0,0) = \frac{\partial^9 q}{\partial x^3 \partial y^6}(0,0) = -\frac{6! \cdot 3!}{3!} = -6!.$$

Questão 2 (25 pts + 5 bônus)**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por:

$$f(x,y) = xy.$$

Considere o conjunto $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\right\}$.

(a) (5 bônus) Esboçe o conjunto C.

(b) (10 pts) A função f possui máximo e mínimo no conjunto C? Justifique.

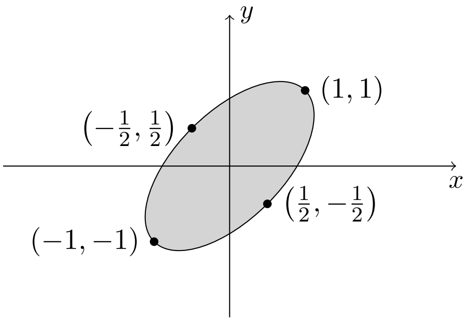
(c) (15 pts) Encontre todos os pontos de máximos e mínimos globais da função f no conjunto C.

Primero escrevemos a desigualdade $5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4$ na forma:

$$(x-y)^2 + \frac{(x+y)^2}{2^2} \leq 1.$$

Para chegar nessa expressão, uma alternativa é escrever o termo do lado esquerdo da equação como o produto de matrizes e depois procuremos os autovalores e autovetores dessa matriz que serão 8 e 2 respectivamente, associados a $(-1,1)$ e $(1,1)$ (confira as notas da aula).

Pela expressão acima, vimos que o conjunto representado é o interior e a fronteira de elípse representado na figura abaixo:



Note que os eixos principais do elipse são direções $(1,1)$ e $(-1,1)$ com as amplitudes $\sqrt{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ respectivamente. Uma outra alternativa para verificar que o conjunto é uma elipse e o seu interior mostrar que os autovalores da matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

são positivas provando que o seu determinante e o seu traço são ambos positivos.
Como o conjunto dada pela desigualdade é o elípse e o seu interior, esse conjunto é fechado e limitado (i.e. compacto), pelo Teorema de Weierstrass (ou Teorema de valor extremo), a função contínua f atinge valor máximo e mínimo nesse conjunto. Para encontrar os pontos em que a função assume os valores extremos precisamos encontrar os pontos críticos no interior e os pontos extremos na fronteira.
No interior, resolvemos $\nabla f(x,y) = (0,0)$, obtendo o ponto $(0,0)$. A matriz Hessiana nesse ponto é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que possui determinante negativo, portanto $(0,0)$ é um ponto de sela.

Na fronteira, definimos $g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4$. Daí $\nabla g(x,y) = (10x - 6y, 10y - 6x)$. Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) + \lambda \cdot \nabla g(x,y) = (0,0) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

O sistema consiste em três equações:

$$\begin{cases} y + \lambda \cdot (10x - 6y) = 0 \\ x + \lambda \cdot (10y - 6x) = 0 \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4 \end{cases}$$

No sistema acima, multiplicamos a primeira equação por $(10y - 6x)$, a segunda equação por $(10x - 6y)$ e substraindo uma pela outra, obteremos:

$$x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y.$$

Substituindo $x = \pm y$ na terceira equação do sistema, encontraremos os pontos $(1,1)$, $(-1,-1)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. É imediato que:

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 1 \qquad \text{e} \qquad f\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = f\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}.$$

Portanto o máximo é atingido nos pontos $(1,1)$, $(-1,-1)$ e o mínimo é atingido nos pontos $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Questão 3 (20 pts)**.** Considere a composição das três funções seguintes. A primeira função é uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\gamma(t) = (\cos(3t), \operatorname{sen} t, t).$$

A segunda função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tal que as matrizes Jacobianas nos pontos $\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ e $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\right)$ são respectivamente:

$$DF\left(0,\tfrac{1}{2},1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad DF\left(-1,\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A terceira função é uma projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ no plano yz, em outras palavras, $P(x,y,z) = (y,z)$. Calcule a matriz Jacobiana da composição $G = (P \circ F \circ \gamma) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ no ponto $t = \frac{\pi}{3}$, isto é:

$$\frac{dG}{dt}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{d}{dt}(P \circ F \circ \gamma)\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ ?$$

Como $G = (P \circ F \circ \gamma)$, pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dG}{dt}\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = DP\left(F\left(\gamma\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right) \cdot DF\left(\gamma\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \gamma'\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$

Portanto:

$$DP\left(F\left(\gamma\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right) \cdot DF\left(\left(-1, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \gamma'\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questão 4 (15 pts)**.** Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela equação:

$$F(a, r) = \big(x(a, r), y(a, r)\big) = (a \sinh r, a \cosh r).$$

(a) (10 pts) Encontre todos os pontos $(a_0, r_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que a função F possui uma inversa local.

(b) (5 pts) Calcule a matriz Jacobiana $\dfrac{\partial F^{-1}}{\partial(x, y)}(0, a)$ da função inversa no ponto $F(a, r) = (0, a)$.

A matriz Jacobiana da Função F é:

$$\begin{pmatrix} \sinh r & a \cosh r \\ \cosh r & a \sinh r \end{pmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é igual a $-a$. Portanto a matriz Jacobiana no ponto (a_0, r_0) é inversível se, e somente se, $a_0 \neq 0$.
Primeiro, fazendo $(x(a, r), y(a, r)) = (0, a)$, temos $a \sinh r = 0$ e $a \cosh r = a$. Logo obtemos $r = 0$. Portanto pelo Teorema da Função Inversa:

$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial(x, y)}(0, a) = DF(a, 0) = \begin{pmatrix} \sinh 0 & a \cosh 0 \\ \cosh 0 & a \sinh 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Questão 5 (20 pts)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada pela expressão:

$$F(\rho, \theta, \phi) = (x(\rho, \theta, \phi), y(\rho, \theta, \phi)) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi).$$

(a) (15 pts) Determine todos os pontos $(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$ tais que a relação:

$$F(\rho, \theta, \phi) - (x_0, y_0) = (0, 0), \qquad \text{com } (x_0, y_0) = F(\rho_0, \theta_0, \phi_0).$$

define, a priori, (θ, ϕ) como funções de ρ numa vizinhança do ponto ρ_0.

(b) (5 pts) Calcule a derivada $\dfrac{d(\theta, \phi)}{d\rho}\left(\tfrac{\pi}{6}\right)$.

Para aplicar o Teorema da Função Implícita, vamos verificar quando a matriz abaixo é inversível:

$$\frac{\partial F}{\partial(\theta, \phi)}(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta \cos\phi \end{pmatrix}.$$

O determinante desta matriz é $-\operatorname{sen}\phi \cos\phi$. Portanto a matriz é inversível se, e somente se $\phi \neq \frac{k\pi}{2}$ com $k \in \mathbb{Z}$ (conjunto de números inteiros). Pelo teorema da Função Implícita:

$$\frac{d(\theta, \phi)}{d\rho} = \left(\frac{\partial F}{\partial(\theta, \phi)}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \rho}.$$

Através de uma conta direta (e imediata), temos:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta, \phi) = 0, \qquad \text{para qualquer } (\rho, \theta, \phi).$$

Portanto:

$$\frac{d(\theta, \phi)}{d\rho}\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 0.$$